TITLE:

ボーズ気体の密度位相近似について(「統計力学の数学的問題」,基研研究会報告)

AUTHOR(S):

西山, 敏之

CITATION:
西山, 敏之. ボーズ気体の密度位相近似について(「統計力学の数学的問題」,基研研究会報告). 物性研究 1975, 23(5): C14-C17

ISSUE DATE:
1975-02-20

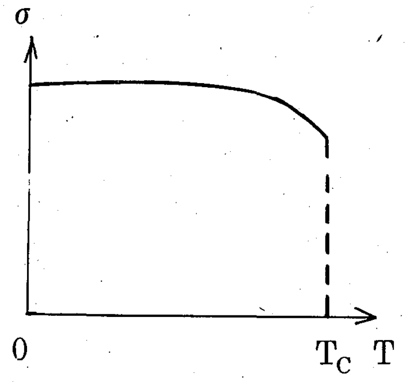
URL:
http://hdl.handle.net/2433/88906

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

$$\lambda_1 = \langle V_{全} \rangle_\sigma,\quad \lambda_2 = \langle V_{全}^{\,2} \rangle_\sigma - \langle V_{全} \rangle_\sigma^2,\quad \cdots \tag{11}$$

のように表される。一様では1次転移は起らない。s＝½ で対称であると一様だから，少くとも s＝1 でないと1次転移は期待できないことが分る。そこで，s＝1 の場合に平均場近似（λ_1 のみ考慮に入れる）で考察してみると，D(1)＝D(-1)＜D(0)／4 であると1次転移が起り，σ－T関係は3図のようになることが分る。



第 3 図

参 考 文 献

1) L.Onsager, Phys. Rev. 65 (1944), 117.
2) C.N.Yang, 同 上 85 (1952), 808.
3) C.N.Yang and T.D.Lee, 同 上 87 (1952), 404, 410.
4) H.Nakano, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 1510,
S.Tanaka and S.Naya, 同 上 51 (1974), 1994.

ボーズ気体の密度位相近似について

阪大教　西 山 敏 之

集団変数を用いてボーズ気体の基底状態や励起状態を求める方法としては，ⅰ）密度位相近似（DP）[1]，ⅱ）Bogoliubov－Zubarev の方法（BZ）[2]，ⅲ）correlated basis function の方法（CBF）[3]，ⅳ）速度演算子の方法（S）[4] などがある。Lee[5] や Berdahl[6] の同等性の証明によればこれらの方法は同じ基底エネルギー，励起エネルギーを与えると考えられる。しかし最近 Takahashi[7] は δ－関数相互作用をもつ1次

元ボーズ気体の厳密解から得られる基底エネルギーと，これらの方法によって得られた基底エネルギーの値とを比較した結果，iii）のCBF法で得た値とは完全に一致するが，ii），と iv）で得た値とは一致しないことを示した。さらに最近の著者[8]の計算によれば i）で得た値とは一致することがわかった。このエネルギーを E_{DP} と書くと，高密度・弱結合の1次元ボーズ気体について

$$E_{DP} = E_{CBF} = E_{exact} \tag{1}$$

となることがわかった。また current algebra を用いた Dashen と Sharp[9] の方法によっても同じ結果が得られることがわかる。[8]

ここでは，密度位相近似では無視されていた，密度0の領域の効果をとりいれるために格子空間を考える。簡単のため，1次元の場合について述べる。

格子間隔を δ と書くと，格子ボーズ気体の運動エネルギーは，粒子の質量をMとして，

$$T = \frac{\hbar^2}{2M\delta^2}\sum_j (\psi^+_{j+1} - \psi^+_j)(\psi_{j+1} - \psi_j) \tag{2}$$

によって与えられる。ψ_j は j 番目の格子点の量子化された格子波動関数で，交換関係

$$[\psi_j,\ \psi^+_{j'}] = \delta_{jj'},\quad [\psi_j,\ \psi_{j'}] = [\psi^+_j,\ \psi^+_{j'}] = 0 \tag{3}$$

を満足する。連続空間における波動関数は $\psi^+_j/\sqrt{\delta}$，$\psi_j/\sqrt{\delta}$ の極限値として定められる，密度位相近似では，粒子数演算子を N_j と $=\psi^+_j\psi_j$ として

$$\psi_j = \chi_j\sqrt{N_j}\ ,\quad \psi^+_j = \sqrt{N_j}\ \chi^+_j \tag{4}$$

とおいて，昇降演算子 χ^+_j，χ_j を用いて表わす。これらを行列代数を用いて書き表わすと

$$\left.\begin{aligned} &\chi^+_j = \sum_{n=0}^{\infty} E^{(j)}_{n+1\ n}\ ,\quad \chi_j = \sum_{n=0}^{\infty} E^{(j)}_{n\ n+1} \\ &E^{(j)}_{nk}E^{(j)}_{\ell m} = E^{(j)}_{nm}\,\delta_{k\ell} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となる。これから $\chi_j\ \chi^+_j = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} E^{(j)}_{nn}$ は $\chi^+_j\chi_j = \sum_{n=0}^{\infty} E^{(j)}_{n+1}$ に等しくないから

$$\chi_j \chi_j^+ - \chi_j^+ \chi_j = P_0^{(j)} \equiv E_{00}^{(j)} \tag{6}$$

となって可換でない。もし計算の途中で粒子数0の格子点をすべて無視するならば，これを可換と考えて，調和振動子の角変数に倣い

$$\chi_j = e^{i\phi_j/h} \tag{7}$$

で定義される位相演算子 ϕ_j を使ってもよいであろう。これが密度位相近似の出発点になっている。このような近似は高密度の系における長波長の励起に関係した問題に適用することが期待される。実際高密度では $\delta-$ 関数相互作用の1次元系で正しい基底エネルギーが得られる。しかし低密度の系では（7）のおきかえは許されないであろう。低密度の極限で，各格子点の粒子数が0または1に限られるという制限をつけると，ハミルトニアン（2）はX－Y 模型またはMatsubara－Matsuda 模型[10]と一致する。この制限を行なうには，射影演算子（または制限演算子[11]）として

$$P = \prod_j (E_{00}^{(j)} + E_{11}^{(j)})$$

を用いて，

$$H_{XY} = PHP$$

をつくればよい。H_{XY} は X－Y 模型のハミルトニアンにほかならない。この系の基底エネルギーはKatsura らによって求められているが，連続の極限では，1次元系で Girardean[12]の値

$$E_{XY} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{N}{L}\right)^2 N$$

に一致する。N は全粒子数，L は系の長さである。中間の密度の系のエネルギーを求め，密度位相近似（DPO）の適用範囲をさらに明らかにするのは残された問題である。また昇降演算子を用いて定義される速度演算子の代数的性質をしらべることは，コヒーレント表示[13]と関係して重要と思われる。この文献を教示された植山宏氏に感謝する。

参考文献

1) T. Nishigama, Prog. Theor. Phys. 7 (1952), 417; 8 (1953), 655.

2) N. N. Bogoliubov and D. N. Zubarev, Zh. Eksp. i. Teor. Fiz. 28 (1955), 129.

3) E. Feenberg, Rev. Mod. Phys. 34 (1962), 686; Ann. Phys. 15 (1961), 266.

4) S. Sunakawa, S. Yamasaki, and T. Kebukawa, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 919.

5) D. K. Lee, Phys. Rev. A4 (1971), 1670.

6) P. Berdahl, Ph.D. Thesis, (Stan ford Univ. 1972).

7) M. Takahashi, Prog. Theor. Phys. 53 (1975), No.2.

8) T. Nishiyama, to be published.

9) R. F. Dashen and D. H. Sharp, Phys. Rev. 165 (1968), 1857.

10) M. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. 16 (1956), 569.

11) H. Nakano, Prog. Theor. Phys. 9 (1953), 33;
T. Nishigama, Prog. Theor. Phys. 5 (1950), 909.

12) M. Girardeau, J. Math. Phys. 1 (1960), 516.

13) P. Carruthers and M. M. Nieto, Rev. Mod. Phys. 40 (1968), 411.

Bose系におけるBogoliubov—Zubarev理論の妥当性について

阪大教養　高橋　実

§1. 序

二体力で相互作用をするスピンのないBose粒子系に対して単純な摂動計算を行うと多くの場合高次摂動項が発散をしてしまうという困難を招く。BogoliubovとZubarev[1]（BZ）はこの系のSchrödinger 方程式を密度変数で書き変え，新しい非エルミートなハミルトニアンを得た。また彼らはこのハミルトニアンを使い，基底状態エネ